Correction TD - D1

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Équation aux dimensions ★☆☆ 5951

1) Pour un mouvement rectiligne :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Vitesse} = \frac{\text{Longueur}}{\text{Temps}} = \frac{\text{L}}{\text{T}} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}}$$

2) Formule de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Énergie} = \left[\frac{1}{2}\right] \times [m] \times \left[v^2\right] = 1 \times \text{M} \times \left(\text{L} \cdot \text{T}^{-1}\right)^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Énergie} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}}$$

3) Formule :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Masse volumique} = \frac{\text{M}}{\text{Volume}} = \frac{\text{M}}{\text{L}^3} = \text{M} \cdot \text{L}^{-3}}$$

4) On a déjà vu que :

$$\text{Énergie} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Pour la force, on utilise le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton) :

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \text{Force} = \frac{\text{Masse} \cdot \text{Vitesse}}{\text{Temps}} = \frac{\text{M} \cdot \text{L}}{\text{T}^2} = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

On en déduit :

$$\boxed{\text{Force} = \frac{\text{Énergie}}{\text{L}}}$$

5) Un angle peut être mis dans une fonction transcendante (sin, cos, tan), il n'a donc pas de dimension.

On peut également revenir à la définition du radian. Par définition, un radian est l'angle formé par un arc de cercle dont la longueur de l'arc est égal au rayon du cercle.

$$1 \text{ rad} = \frac{r \text{ (longueur de l'arc de cercle)}}{r \text{ (rayon du cercle)}}$$

C'est un rapport de deux longueurs, il n'a donc pas de dimension.

Ex. n°2 • Homogénéité ★☆☆ 0398

1) Non car :

$$[R_{eq}] \neq \frac{1}{[R_1]}$$

2) Non, car l'argument dans l'exponentielle doit être adimensionné.

3) Non car 1 n'est pas homogène à une longueur (les autres termes sont corrects).

4) On a :

$$[2\pi]\left(\frac{[\ell]}{[g]}\right)^{1/2} = 1 \times \left(\frac{\text{L}}{\text{L} \cdot \text{T}^{-2}}\right)^{1/2} = \left(\text{T}^2\right)^{1/2} = \text{T}$$

Il s'agit bien d'un temps. Cette formule est homogène mais rien ne garanti que le facteur 2π soit correct !

5) On a :

$$\left[\frac{c}{f}\right] = \frac{\text{L} \cdot \text{T}^{-1}}{\text{T}^{-1}} = \text{L}$$

Il s'agit bien d'une longueur.

Ex. n°3 • Vitesse d'une chute libre ★☆☆ 9792

1) On pose : $v \propto h^\alpha M^\beta g^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot \left(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \text{m} & \rightarrow & 1 = \alpha + \gamma \\ \text{s} & \rightarrow & -1 = -2\gamma \\ \text{kg} & \rightarrow & 0 = \beta \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1/2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{v \propto \sqrt{gh}}$$

La vitesse au niveau du sol ne dépend pas de la masse de l'objet. Donc tous les objets tombent à la même vitesse (dans le cas où les frottements de l'air sont négligés).

2) On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre un état inital EI ($v = 0$ et $z = h$) et un état final EF (v et $z = 0$).

$$\underbrace{0 + mgh}_{\mathcal{E}_m(EI)} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + 0}_{\mathcal{E}_m(EF)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 9{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Ex. n°4 • Rendement de la charge d'un condensateur ★★☆ 5906

On pose : $\eta \propto R^\alpha C^\beta E^\gamma$. On raisonne avec les unités (tension en V, intensité en A et temps en s). Un rendement n'a pas de dimension car c'est le rapport de deux énergies.

$$1 = \left(\text{V} \cdot \text{A}^{-1}\right)^\alpha \cdot \left(\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{v}^{-1}\right)^\beta \cdot \text{V}^\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{s} \ \rightarrow \ 0 = \beta \\ \text{A} \ \rightarrow \ 0 = -\alpha + \beta \\ \text{V} \ \rightarrow \ 0 = \alpha - \beta + \gamma \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta \propto 1}$$

Le rendement ne dépend pas du choix de R, C ou E, c'est une constante.

Pour aller plus loin

Ex. n°5 • Trajectoire circulaire ★⯪☆ 4041

On pose : $a \propto R^\alpha M^\beta v^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{m}^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot \left(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{m} \ \rightarrow \ 1 = \alpha + \gamma \\ \text{s} \ \rightarrow \ -2 = -\gamma \\ \text{kg} \ \rightarrow \ 0 = \beta \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \propto \frac{v^2}{R}}$$

L'accélération croît avec le carré de la vitesse et ne dépend pas de la masse.

Ex. n°6 • Rayon de Schwarzschild ★★☆ 5815

1) On rappelle la force de gravitation :

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Et le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton) :

$$F = ma$$

On en déduit la dimension de G :

$$\text{Force} = [G] \times \left(\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\right)^2 = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \quad \Rightarrow \quad [G] = \text{M}^{-1} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$$

On pose : $R_S \propto G^\alpha M^\beta c^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\text{m} = \left(\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}\right)^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot \left(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{m} \ \rightarrow \ 1 = 3\alpha + \gamma \\ \text{kg} \ \rightarrow \ 0 = -\alpha + \beta \\ \text{s} \ \rightarrow \ 0 = -2\alpha - \gamma \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_S \propto \frac{GM}{c^2}}$$

2) D'après l'énoncé, la constante adimentionnée vaut 2. Ainsi,

$$\boxed{R_S = \frac{2GM}{c^2} = 3{,}0 \text{ km}}$$

Si toute la masse du soleil était compactée dans une sphère de 3,0 km de rayon, alors le soleil serait un trou noir.

Ex. n°7 • Facteur de qualité d'un circuit RLC ★★★ 2612

On pose : $Q \propto R^\alpha L^\beta C^\gamma$. On raisonne avec les unités (tension en V, intensité en A et temps en s). Un facteur de qualité n'a pas de dimension.

$$1 = \left(\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}\right)^\alpha \cdot \left(\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1}\right)^\beta \cdot \left(\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{V} \ \rightarrow \ 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ \mathrm{A} \ \rightarrow \ 0 = -\alpha - \beta + \gamma \\ \mathrm{s} \ \rightarrow \ 0 = \beta + \gamma \end{cases}$$

On remarque que l'équation sur V est la même que celle sur A (il suffit de multiplié par -1 pour passer de l'une à l'autre). On a donc en réalité seulement 2 équations pour 3 inconnues. On ne pourra pas résoudre entièrement, il restera un paramètre. Exprimons tout en fonction de α.

Sommons les équations sur V et s :

$$\alpha + 2\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = -\frac{\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\alpha}{2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{Q \propto \left(R\sqrt{\frac{C}{L}}\right)^\alpha}$$

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°8 • Puissance d'une bombe nucléaire ★★★ 2510

1) Commençons par convertir les Joules (unité de l'énergie) dans les USI.

$$[\mathcal{E}] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \text{Masse}\cdot\text{Vitesse}^2 = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

On pose : $\mathcal{E} \propto t^\alpha R^\beta \rho^\gamma$. On raisonne avec les USI.

$$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{s}^\alpha\cdot\mathrm{m}^\beta\cdot\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{kg} \ \rightarrow \ 1 = \gamma \\ \mathrm{m} \ \rightarrow \ 2 = \beta - 3\gamma \\ \mathrm{s} \ \rightarrow \ -2 = \alpha \end{cases}$$

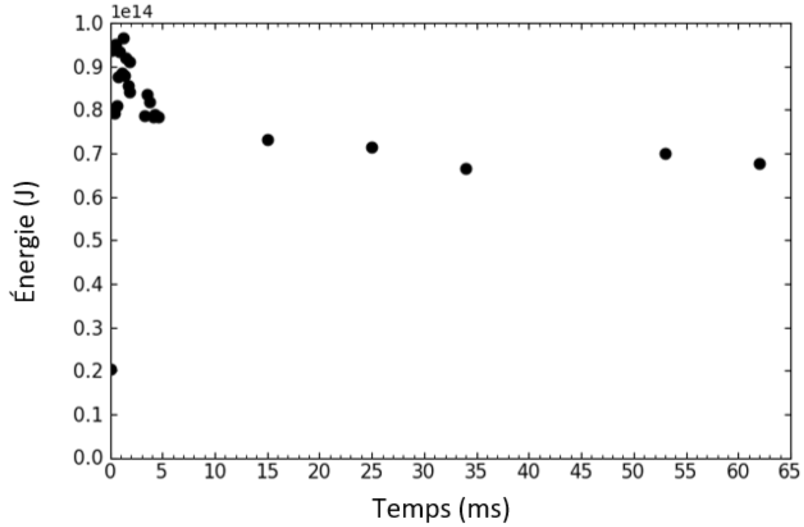
On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} \propto \frac{\rho R^5}{t^2}}$$

2) On lit graphiquement $R = 107$ m (confirmé par le tableau de la question 3). On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E} \simeq \frac{\rho R^5}{t^2} = 7\times 10^{13}\ \mathrm{J}}$$

3) Une manière de répondre à la question, est de montrer que R^5/t^2 est constant (l'énergie est alors une constante). Sur le graphe ci-dessous, on trace $\rho R^5/t^2$ (ce qui est équivalent car ρ est constant) en fonction de t.



On constate que cette grandeur est globalement constante, ce qui valide les puissances choisies pour les paramètres t et R. On constate également que pour éviter une (légèrement) mauvaise estimation de $\mathcal{E}$, cette analyse doit être faite pour des temps $t > 10$ ms.